SZKOŁA GŁÓWNA HANDLOWA W WARSZAWIE

Kolegium Analiz Ekonomicznych

Autoreferat pracy doktorskiej pt.

Modele: Solowa i Mankiwa-Romera-Weila z endogenicznymi stopami oszczędności. Analiza chaotycznej dynamiki

Małgorzata Kamieniecka

Praca napisana w Kolegium Analiz Ekonomicznych
Pod kierunkiem naukowym
dra hab. Roberta Kruszewskiego, prof. SGH

Warszawa, październik 2018

I Uzasadnienie wyboru tematu

„Skoro zaczyna się myśleć o wzroście gospodarczym, to trudno jest myśleć o czymś innym."

Robert Lucas[1]

Teoria wzrostu gospodarczego, obecna w ekonomii od lat 30-tych i 40-tych ubiegłego stulecia, opiera się na matematycznych modelach, określonych za pomocą zestawu parametrów i zmiennych, opisujących „źródła, mechanizmy i procesy wzrostu gospodarczego w sposób deterministyczny" [2].

Wyjątkowe miejsce wśród licznych modeli wzrostu zajmują modele nieliniowe, szczególnie te, które wyjaśniają przyczyny powstawania fluktuacji gospodarczych (cykli). Mimo szerokiego wachlarza możliwości, jako punkt wyjścia do rozważań nad wzrostem gospodarczym nadal chętnie stosowany jest model Solowa (Solowa-Swana[3]). Jego najbardziej znaną modyfikacją jest, opracowany w 1992 roku przez N. Gregory'ego Mankiwa, Davida Romera i Davida N. Weila[4], dwuwymiarowy model uwzględniający dodatkowy czynnik produkcji w postaci kapitału ludzkiego. Model Mankiwa, Romera i Weila jest z powodzeniem modyfikowany i stosowany do wyjaśnienia zjawiska konwergencji zarówno w wersjach stochastycznych[5], jak i deterministycznych. Wprowadzenie do modelu czynników o charakterze endogenicznym znacznie rozszerza zakres jego stosowania w teoretycznych rozważaniach. Modyfikacje dotyczą np. uwzględniania wiedzy technologicznej jako

---

[1] Lucas R.E., On the Mechanics of Economic Development, „Journal of Monetary Economics", 1988, no 22, s. 3–42.
[2] Malaga K., O niektórych dylematach teorii wzrostu gospodarczego i ekonomii, „ZK Polskie Towarzystwo Ekonomiczne", Warszawa 2009.
[3] W lutym 1956 roku R.M. Solow w publikacji *A Contribution to the Theory of Economic Growth* zamieszczonej w "Quarterly Journal of Economics" przedstawił założenia swojego modelu wzrostu gospodarczego, w listopadzie tego samego roku T.W. Swan opisał swój, bardzo zbliżony do koncepcji Solowa model w artykule pt. *Economic Growth and Capital Accumulation* zamieszczonym w "Economic Record".
[4] Mankiw N. Gregory, David Romer, David N. Weil, *A Contribution to the Empirics of Economic Growth*, „Quarterly Journal of Economics", 107, 1992, s. 407 – 437.
[5] Kevin Lee K., Pesaran M.H., Smith R., *Growth and Convergence in a Multi-Country Empirical Stochastic Solow*, „Journal of Applied Econometrics", Vol. 12, No. 4 (Jul. - Aug., 1997), pp. 357-392.

kolejnego czynnika produkcji[6], transferu technologii pomiędzy krajami[7], współzależności miedzy krajami[8] lub zmiany postaci funkcji produkcji[9].
Tworzone są również wielowymiarowe wersje tego modelu[10].

Temat podjęty w niniejszej pracy stanowi kontynuację i pogłębienie zagadnień rozpatrywanych we wspomnianych wyżej badaniach. Motywacją do uwzględnienia w zastosowanych modelach zmiennych stóp oszczędności były wyniki badań przeprowadzonych w 2001 roku przez B.S. Bernanke oraz R.S. Gurkaynak, według których długookresowy wzrost powinien być skorelowany ze zmiennymi behawioralnymi, które mają wpływ na stopę oszczędności[11].

II Cel rozprawy, teza i hipotezy badawcze

Głównym celem niniejszej pracy jest przeprowadzenie analizy i porównanie dynamiki tego samego nieliniowego modelu wzrostu gospodarczego w dwóch wariantach różniących się modelowaniem zmiennej niezależnej czyli czasu. Na przykładzie zaproponowanych modeli przedstawiony został wpływ wyboru charakteru zmiennej czasowej na zachowanie układu. Ponadto wskazane zostały warunki sprzyjające występowaniu cykli gospodarczych i okoliczności, z powodu których zastosowanie zmiennych, endogenicznych stóp oszczędności wpływa na okresowe wahania kapitału. Określony został wpływ rozszerzenia modelu o kapitał ludzki na dynamikę globalną układu. Analizowane modele - model Solowa oraz model Mankiwa-Romera-Weila po wprowadzeniu modyfikacji w postaci zmiennych stóp oszczędności zgodnie z propozycją Richarda H. Day'a[12] - stanowią oryginalny wkład autorki. Analiza

---

[6] Nonneman W., Vanhoudt P., *A Further Augmentation of the Solow Model and the Empirics of Economic Growth for OECD Countries*, „The Quarterly Journal of Economics", Vol. 111, No. 3 (Aug., 1996), pp. 943-953.
[7] Dowrick S., Rogers M. *Classical and Technological Convergence: Beyond the Solow-Swan Growth Model*, „Oxford Economic Papers", Vol. 54, No. 3 (Jul., 2002), pp. 369-385.
[8] Ertur C., Koch W., *Growth, Technological Interdependence and Spatial Externalities: Theory and Evidence*, „Journal of Applied Econometrics", Vol. 22, No. 6 (Sep. - Oct., 2007), pp. 1033-1062.
[9] Masanjala W.H., Papageorgiou C. *The Solow Model with CES Technology: Nonlinearities and Parameter Heterogeneity*, „Journal of Applied Econometrics", Vol. 19, No. 2 (Mar. - Apr., 2004), pp. 171-201.
[10] Tokarski T., *Optymalne stopy inwestycji w N-kapitałowym modelu wzrostu gospodarczego*, „Gospodarka Narodowa", Nr 9/2007.
[11] Bernanke B.S., Gurkaynak R.S. *Is Growth Exogenous? Taking Mankiw, Romer and Weil Seriously*, NBER Working Paper No. 8365, July 2001.
[12] Day R.H., *Irregular Growth Cycles*, „The American Economic Review", Vol. 72, No. 3 (Jun.,1982), 406-414.

numeryczna zaproponowanych modeli przeprowadzona została za pomocą programu iDMC[13].

Tezą badawczą stawianą w niniejszej pracy jest możliwość poprawy jakości prognoz dostarczanych przez deterministyczne modele wzrostu gospodarczego poprzez uwzględnienie zachowań charakterystycznych dla nieliniowych układów dynamicznych.
W ramach tak postawionej tezy weryfikowane były następujące hipotezy badawcze:

- Wybór zmiennej czasowej jako zmiennej dyskretnej lub ciągłej może znacząco wpływać na dynamikę zastosowanego modelu nieliniowego.
- Wprowadzenie do systemu nieliniowego kolejnego wymiaru (np. w postaci kapitału ludzkiego) zmienia własności dynamiczne modelu (także zakres prognozowania).
- Zastosowanie endogenicznych stóp oszczędności w nieliniowym modelu wzrostu ma istotny wpływ na dynamikę modelu i może być źródłem cykliczności w gospodarce.

III Przegląd literatury

Wśród czynników wpływających na stan gospodarki znajdujemy zarówno popyt na towary (dobra i usługi) konsumpcyjne i inwestycyjne, jak i czynniki podażowe (np. praca, kapitał, ziemia, surowce)[14]. W zależności od przyjętej perspektywy czasowej dostrzegamy znaczący wpływ składników popytu globalnego (w krótkich okresach) lub podażowych czynników wzrostu (w długim okresie). Wykorzystany w rozprawie model Mankiwa-Romera- Weila uwzględnia dodatkowy (w odniesieniu do oryginalnego modelu Solowa) czynnik podażowy w postaci kapitału ludzkiego.

Zainteresowanie kapitałem ludzkim i jego wpływem na poziom bogactwa (dobrobytu) trwa niemal nieprzerwanie od kilku wieków. Jako pierwszy[15] tego typu rozważania podjął Wiliam Petty (1623-1687), który zauważył, iż kapitał tkwiący w człowieku

[13] iDMC - interactive dynamical model calculator, M.Lines, A.Medio, www.gitorious.org/idmc
[14] Begg D., Fischer S., Dornbusch R., *Makroekonomia*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 2003
[15] Kunasz M., *Teoria kapitału ludzkiego na tle dorobku myśli ekonomicznej*. (w:) A. Manikowski, A. Psyk (red.). „Unifikacja gospodarek europejskich: szanse i zagrożenia". Uniwersytet Warszawski, Warszawa 2004, s.28.

charakteryzuje się wieloma podobieństwami z kapitałem trwałym (rzeczowym)[16]. Za twórców pojęcia i teorii kapitału ludzkiego uznaje się T.W Schultza[17], G.S Beckera[18] i J. Mincera[19]. W latach 80 XX wieku pojęcie „kapitału ludzkiego" pojawiło się w teorii wzrostu endogenicznego, a następnie, w 1992 r. we wspomnianym modelu Mankiwa-Romera-Weila. Od tego czasu opublikowano szereg prac poświęconych bezpośredniej lub pośredniej obecności kapitału ludzkiego w teorii wzrostu i implikacji tego faktu dla przyszłości badań teoretycznych i empirycznych[20].

Naturalną konsekwencją celu modelowania (upraszczania rzeczywistości ekonomicznej) wydaje się tworzenie liniowych modeli deterministycznych. Jednak liniowość systemu implikuje istnienie równowagi do której ewoluuje system lub rozbieżności. W tym miejscu ujawnia się pierwsza niedoskonałość modeli liniowych. Zainteresowanie ekonomistów skupia się wyłącznie na interpretacji warunków równowagi, gdyż inne zachowania graniczne modelu są z ekonomicznego punktu widzenia nieprzydatne - mogą oznaczać np. upadek gospodarki lub ujemne ceny.[21]

Jednakże systemy ekonomiczne podlegają działaniu tak dużej ilości czynników, iż uzasadnione jest stosowanie modeli stochastycznych, szczególnie, że tego typu modele cechuje często dobre dopasowanie do rzeczywistych danych. Warto natomiast zastanowić się nad tym, „czy sama ocena dopasowania nie prowadzi do nadużywania modeli określonej klasy?" Pytanie takie stawia Witold Orzeszko (2005)[22] i korzystając z rozważań Lorenza[23], na przykładzie nieliniowego modelu Hicksa z ograniczeniami wykazuje, że *„koncepcja dodawania szumu do modelu*

[16] Domański S.R., *Kapitał ludzki i wzrost gospodarczy*, PWN, Warszawa 1993.
[17] Schultz T.W., *Investment in human capital*, „American Economic Review" 1961, 51 (1), s. 1– 7.
[18] Becker G.S., *Human capital: A theoretical and empirical analysis*, New York: Columbia University Press 1964.
[19] Mincer J., Investment in Human Capital and Personal Income Distribution, "The Journal of Political Economy" 1958, vol. 66, no. 4, ss. 281-302.
[20] Flisikowski K., *Zasoby, struktura kapitału ludzkiego a wzrost gospodarczy*, „Nierówności Społeczne a Wzrost Gospodarczy" 2012 nr 26, s. 203-215.
[21] Bullard J.B., Butler A. , *Nonlinearity and Chaos in Economic Models: Implications for Policy Decisions*, maszynopis 1991-002B, The Federal Reserve Bank of St. Louis., s. 5.
[22] Orzeszko W., *Modele chaotyczne w ekonomii*, „Acta Universitatis Nicolai Copernici. Nauki Humanistyczno-Społeczne. Ekonomia", Tom 36 (2005) s. 155-170, Toruń 2005.
[23] Lorenz H.W., *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion*, Springer – Verlag, Berlin 1989, Heidelberg, s. 29.

liniowego może prowadzić do błędnego rozpoznania mechanizmu badanego zjawiska ekonomicznego."

Analiza literatury z zakresu teorii wzrostu gospodarczego wskazuje, że rozsądną alternatywę dla stochastycznych modeli liniowych stanowią nieliniowe systemy deterministyczne, obecne w ekonomii już od połowy XX, w szczególności stosowane do opisu cykli gospodarczych (Kalecki, Timberg, Kaldor).[24] Jednak i one (głównie wczesne modele nieliniowe o regularnym przebiegu) nie opisują dobrze złożonego charakteru rzeczywistości gospodarczej, charakteryzującej się bogactwem potencjalnych zachowań. Skłania to ekonomistów do zainteresowania inną klasą modeli nieliniowych, które ze względu na złożoną ewolucję wykazują podobieństwo do systemów losowych, w szczególności generują cykle o zmiennym okresie i amplitudzie.

W tym samym roku (1975), w którym termin „chaos deterministyczny" pojawił się w literaturze (Li i York)[25], May i Beddington[26] zasygnalizowali możliwość zastosowania teorii chaosu w ekonomii. Od tego czasu skonstruowano wiele nowych modeli ekonomicznych z dynamiką chaotyczną lub rozpoznano chaos w modelach już istniejących.[27] Modele tego typu są obecnie z powodzeniem stosowane do wyjaśniania cykli gospodarczych, przy czym we współczesnych systemach źródłem cykliczności są najczęściej opóźnienia czasowe w reakcjach agentów na sygnały z rynku oraz zmienne oczekiwania dotyczące przyszłości.[28] Punkt wyjścia do tych rozważań stanowią zwykle modele liniowe (w oryginalnej wersji) modyfikowane następnie do postaci, która charakteryzuje się bardziej złożoną dynamiką. Dużą popularnością cieszy się np. model Samuelsona- Hicksa (współdziałanie mnożnika i akceleratora), którego nieliniowe wersje rozważane są

[24] Drabik E.: *Dynamiczne nieliniowe modele ekonometryczne: model cykli koniunkturalnych Kaleckiego-Kaldora oraz model wzrostu.* W: *Rynek kapitałowy. Skuteczne inwestowanie.* Red. W. Tarczyński. Szczecin 2002, s. 261-273.
[25] Li, T. Y. and Yorke, J. A., *Period three implies chaos*, Amer. Math. Monthly 82 (1975), no. 10, 985–992,
[26] May R., Beddington J.R., *Nonlinear Difference Equations: Stable Points, Stable Cycles, Chaos*. Maszynopis, 1975.
[27] Miśkiewicz-Nawrocka M., *Modele ekonomiczne z dynamiką chaotyczną* Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach Czasopismo Studia Ekonomiczne, Rocznik 2013, Tom 132, Strony 56-66 oraz Orzeszko W. *Modele…, op.cit.*
[28] Grandmont J.M., *On endogenous competitive business cycles*, Econometrica 1985, vol. 50, 1345-1370.

w pracach: Gabisch (1984)[29], Hommes, Nusse (1990)[30], Hommes (1991)[31]; Kruszewski (2006[32], 2010[33]), Puu, Gardini, Sushko (2005)[34]; Puu (2007)[35]. Analiza prac, w których zastosowano nieliniowe (w tym chaotyczne) układy (między innymi: Cars Hommes[36], Marji Lines i Frank Westerhoff[37], Hans-Walter Lorenz[38], Tomasz Tokarski[39], Robert Kruszewski[40]) prowadzi do konkluzji, że celowe jest stosowanie dynamiki chaotycznej w ekonomii i potwierdza, że tego rodzaju modele będą w dalszym ciągu z powodzeniem stosowane do opisywania rzeczywistości gospodarczej. Nie zastąpią zapewne (stosowanych obecnie powszechnie) stochastycznych modeli liniowych, ale stanowią ich ważne uzupełnienie.

IV Zmienne stopy oszczędności

Zarówno model Solowa, jak i model Mankiwa-Romera-Weila, charakteryzują się egzogenicznymi, stałymi stopami oszczędności. W zaproponowanych przez autorkę

---

[29] Gabisch G., *Nonlinear Models of Business Cycle Theory*, w: Selected Topics in Operations Research and Mathematical Economics, red. G. Hammer, D. Pallaschke, Springer-Verlag, Berlin 1984.

[30] Nusse H. E., Hommes C.H., *Resolution of chaos with application to a modified Samuelson model*, Journal of Economic Dynamics and Con-trol, 14 (1990).

[31] Hommes C. H., *Adaptive learning and roads to chaos. The case of the cobweb model*, „Economic Letters", 36 (1991).

[32] Kruszewski R., *Periodic and quasi-periodic dynamics in a modified Samuelson-Hicks model*, Macromodels 2006, Łódź, 2007.

[33] Kruszewski R., *Wybrane modele współdziałania mnożnika i akceleratora. Analiza chaotycznej dynamiki,* Oficyna Wydawnicza SGH, Warszawa 2010.

[34] Puu T., Gardini L., Sushko I., A multiplier - accelerator model with floor determined by capital stock, Journal of Economic Behavior and Organization, 56 (2005).

[35] Puu T., *The Hicksian trade cycle with floor and ceiling dependent on capital stock*, Journal of Economic Dynamics and Control, 31 (2007).

[36] Hommes C. H., *Adaptive learning and roads to chaos. The case of the cobweb model*, „Economic Letters", 36 (1991); Hommes C.H., *Periodic, almost periodic and chaotic behaviour in Hicks' non-linear trade cycle model*, „Economics Letters", 41 (1993) oraz Hommes C.H., *A reconsideration of Hicks' non-linear trade cycle model,* „Structural Change and Economic Dynamics", 6 (1995).

[37] Lines M., *Bifurcation scenarios in a heterogeneous agent, multiplier accelerator model*, „Pure Mathematics and Applications", 16 (2007); Lines M., Westerhoff F., *Inflation expectations and macroeconomic dynamics: The case of rational versus extrapolative expectations,* „Journal of Economic Dynamics and Control", 34 (2010); Westerhoff H., *Nonlinear expectation formation, endogenous business cycles and stylized facto*, „Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics", 10 (2006c), Issue 4, Article 4.

[38] Lorenz H.W., *Goodwin.s nonlinear accelerator and chaotic motion*, „Journal of Economics", 47 (1987).

[39] Tokarski T., *Determinanty wzrostu gospodarczego w warunkach stałych efektów skali,* Katedra Ekonomii Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 2001.

[40] Kruszewski R., *O pewnym modelu wzrostu gospodarczego z kapitałem ludzkim i endogenicznym postępie wiedzy*, Problemy wzrostu gospodarczego we współczesnych gospodarkach, red. D. Kopycińska, Uniwersytet Szczeciński, Szczecin 2006, s. 18-24; oraz Kruszewski R., *Growth model with human capital. Complex economic dynamics*, Modeling Economies in Transition 2005, red Władysław Welfe, Piotr Wdowinski, AMFET, Łódź 2006, s. 63-74.

modelach ograniczenia te zostały usunięte. Stopy oszczędności są zmienne w czasie i endogeniczne. Powyższy postulat został zrealizowany poprzez adaptację propozycji R.H. Day'a[41] wiążącej stopę oszczędności z dochodem, posiadanym majątkiem i realną stopą procentową. Dla modelu Solowa oszczędności są w tym przypadku opisane równaniem:

$$sy_t = a\left(1-\frac{b}{r}\right)k_t, \tag{1}$$

Gdzie, r oznacza realną stopę procentową: $r = \frac{df(k)}{dk}$, natomiast $a > 0$ i $b \in (0, r)$ to parametry, które mają charakter behawioralny i obrazują zachowanie konsumenta w stosunku do realnej stopy procentowej (uśrednione wielkości dla całej populacji).

Implementując powyższe założenie w modelu Mankiwa-Romera-Weila otrzymamy:

$$s_K y_t = a_K\left(1-\frac{b_K}{r_K}\right)k_t, \tag{2}$$

$$s_H y_t = a_H\left(1-\frac{b_H}{r_H}\right)h_t, \tag{3}$$

gdzie $r_K = \frac{\partial\varphi(k,h)}{\partial k}$, $r_H = \frac{\partial\varphi(k,h)}{\partial h}$ to stopy procentowe, równe krańcowej produktywności każdego typu kapitału, natomiast $a_K, a_H > 0$, $b_K \in (0, r_K)$, $b_H \in (0, r_H)$ to parametry o charakterze behawioralnym obrazujące zachowanie konsumenta w stosunku do realnych stóp procentowych (ponownie uśrednione wielkości dla całej populacji). Bez straty ogólności w pracy założono, że stopy deprecjacji kapitału fizycznego i ludzkiego w modelu Mankiwa-Romera-Weila są równe. Uprościło to stronę algebraiczną przekształceń. Podobnie: $a_K = a_H$ oraz $b_K = b_H$. W rozważaniach przyjęto funkcję produkcji typu Cobba-Douglasa, w której k i h oznaczają odpowiednio: kapitał fizyczny i ludzki na jednostkę efektywnej pracy. Wówczas: $f(k) = k^\gamma$, dla modelu Solowa oraz $\varphi(k,h) = k^\alpha h^\beta$ dla modelu Mankiwa-Romera-Weila, gdzie $0 < \gamma < 1$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $\alpha + \beta < 1$.

[41] Day R.H., *op.cit.*

Po modyfikacji, czyli wprowadzeniu zmiennych stóp oszczędności, zgodnie z: (1), (2), (3), oszczędności w obu analizowanych modelach są zależne od dochodu i rosną wraz ze wzrostem realnej stopy procentowej.

V Dynamika modelu Solowa i modelu Mankiwa-Romera-Weila z endogenicznymi stopami oszczędności w czasie dyskretnym

Po uwzględnieniu zmiennej stopy oszczędności, zgodnie z (1), (2), (3), równanie opisujące dynamikę kapitału na jednostkę efektywnej pracy w modelu Solowa przyjmuje postać:

$$k_{t+1} = \frac{1}{(n+1)(g+1)}\left[a(1-b\gamma^{-1}k_t^{1-\gamma})k_t + (1-\delta)k_t\right].$$

a równania opisujące ewolucję w czasie kapitału fizycznego oraz kapitału ludzkiego na jednostkę efektywnej pracy w modelu Mankiwa- Romera- Weila:

$$k_{t+1} = \frac{1}{(n+1)(g+1)}\left[a(1-b\alpha^{-1}k_t^{1-\alpha}h_t^{-\beta})k_t + (1-\delta)k_t\right],$$

$$h_{t+1} = \frac{1}{(n+1)(g+1)}\left[a(1-b\beta^{-1}k_t^{-\alpha}h_t^{1-\beta})h_t + (1-\delta)h_t\right].$$

W zaproponowanych modelach założono stałą, egzogeniczną stopę wzrostu $n>0$ populacji oraz stałą egzogeniczną stopę $g>0$ postępu technicznego. Kapitał deprecjonuje się według stałej i egzogenicznej stopy $\delta \in (0,1)$.

Zbadano dynamikę tak skonstruowanych modeli, w szczególności poprzez określenie równowagi i warunków, przy których równowaga jest lokalnie asymptotycznie stabilna. Dokonano szczegółowego opisu zachowań układu z zastosowaniem teorii bifurkacji, cech wykładnika Lapunowa oraz (w przypadku dwuwymiarowym) entropii Kołmogorowa i wymiaru Lapunowa atraktora chaotycznego.

VI Dynamika modelu Solowa i modelu Mankiwa-Romera-Weila z endogenicznymi stopami oszczędności w czasie ciągłym

Po uwzględnieniu zmiennej stopy oszczędności zgodnie z (1) równanie opisujące dynamikę kapitału na jednostkę efektywnej pracy w modelu Solowa przyjmuje postać:

$$\dot{k} = a(1 - b\gamma^{-1}k^{1-\gamma})k - (n + g + \delta)k$$

Ponownie założono stałą, egzogeniczną stopę wzrostu $n > 0$ populacji, stałą egzogeniczną stopę $g > 0$ postępu technicznego oraz egzogeniczną stopę deprecjacji kapitału $\delta \in (0,1)$.

Analogicznie jak w przypadku oryginalnego modelu Solowa, stopa zmian zasobu kapitału na jednostkę efektywnej pracy jest różnicą między dwoma wyrażeniami. Pierwsze wyrażenie, $sf(k) = a(1 - b\gamma^{-1}k^{1-\gamma})k$, to faktyczne inwestycje na jednostkę efektywnej pracy, drugie wyrażenie, $(n + g + \delta)k$, to inwestycje restytucyjne, czyli wielkość inwestycji niezbędna do utrzymania kapitału na istniejącym poziomie.

Zastosowanie zależności opisujących stopy oszczędności (2) i (3), prowadzi do nowej postaci równań dynamiki modelowanych zmiennych w modelu Mankiwa-Romera- Weila:

$$\dot{k} = a(1 - b\alpha^{-1}k^{1-\alpha}h^{-\beta})k - (n + g + \delta)k,$$

$$\dot{h} = a(1 - b\beta^{-1}k^{-\alpha}h^{1-\beta})h - (n + g + \delta)h.$$

Przeprowadzono analizę dynamiki tak skonstruowanych modeli. Wyznaczono równowagę i określono warunki jej stabilności. Oba zmodyfikowane modele (jedno- i dwuwymiarowy) posiadają dokładnie jeden punkt równowagi i jest to równowaga lokalnie asymptotycznie stabilna. W przypadku niskiego poziomu oszczędności określonych zależnością zaproponowaną przez R.H. Day'a, oszczędności faktyczne są mniejsze od restytucyjnych, w związku z czym następuje konsumpcja zgromadzonego kapitału.

VII Podsumowanie

W pracy zaprezentowane zostały zmodyfikowane modele: Solowa oraz Mankiwa-Romera-Weila. Modyfikacja polegała na wprowadzeniu zmiennej stopy oszczędności o charakterze endogenicznym, zgodnie z propozycją R.H. Day'a[42]. Następnie zbadano dynamikę tak skonstruowanych modeli, w wersji ciągłej i dyskretnej. Najistotniejsze wnioski wynikające z przeprowadzonych (w odniesieniu do wymienionych wyżej hipotez) w pracy analiz można podsumować następująco:

- Zaproponowane modele z czasem ciągłym, (zarówno w wersji jedno- jak i dwuwymiarowej) posiadają dokładnie jeden punkt równowagi i jest to równowaga lokalnie asymptotycznie stabilna. Wprowadzenie zmiennych stóp oszczędności, w sposób wskazany przez R. Day'a wpłynęło nie tylko na wartość obu rodzajów kapitału w równowadze, ale zmieniło charakter zależności kapitału w równowadze od skłonności konsumentów do oszczędzania. W oryginalnych modelach (Solowa oraz Mankiwa-Romera-Weila) zależność kapitału (fizycznego w modelu Solowa, fizycznego i ludzkiego w modelu Mankiwa-Romera-Weila) w równowadze była wypukłą funkcją stopy oszczędności. W zmodyfikowanych modelach zależność kapitału w równowadze od parametru wyrażającego skłonność konsumentów do oszczędzania jest funkcją wklęsłą. Oznacza to pojawienie się stanu „nasycenia" dla dużych wartości ww. parametru. Reasumując; wprowadzenie zmiennych stóp oszczędności zmieniło w istotny sposób zależność zgromadzonego kapitału od skłonności konsumentów do oszczędzania.
- Zmodyfikowane poprzez wprowadzenie zmiennej stopy oszczędności modele analizowane w czasie dyskretnym, pomimo niskiej liczby wymiarów charakteryzują się złożoną dynamiką, a stopień jej złożoności zależy od parametru obrazującego zachowanie konsumenta w stosunku do realnych stóp procentowych. W obu przypadkach (model jedno- i dwuwymiarowy) układ tracił stabilność na skutek bifurkacji podwojenia okresu. Ujawniły się zachowania cykliczne, quasi-okresowe oraz chaotyczne. Wystąpienie zjawiska chaosu deterministycznego implikowało ograniczenie horyzontu czasowego dla możliwości prognozowania do tzw. charakterystycznego czasu Lapunowa.

[42] Day R.H., *op.cit.*

Pomiędzy obszarami chaotycznymi pojawiły się okna stabilności o niskim okresie (wysokim w porządku Szarkowskiego), przerywane wybuchami intermitencji, które następowały coraz częściej w miarę wzrostu parametru przedstawiającego skłonność konsumentów do oszczędzania. W przypadku modelu z kapitałem ludzkim pojawiła się ponadto bifurkacja Neimarka-Sackera z charakterystycznymi, quasi-okresowymi rozwiązaniami.

- Rozszerzenie modelu Solowa o kapitał ludzki znacznie ogranicza obszar stabilności równowagi stacjonarnej oraz możliwość pojawiania się cykli o dowolnych okresach. Dowiedziono, iż w zaproponowanych modelach możliwa i celowa jest analiza dynamiki również poza obszarem lokalnej asymptotycznej stabilności. Zachęcenie konsumentów do określonych zachowań w stosunku do realnych stóp procentowych umożliwia uniknięcie chaosu, a nawet sterowanie występowaniem i okresowością cyklu gospodarczego.
- Decyzja o wyborze zmiennej czasowej (ciągłej lub dyskretnej) w przypadku modeli nieliniowych wpływa na możliwość zastosowania modelu do określonych celów. Np. w rozpatrywanym przypadku konsekwencją wyboru zmiennej czasowej dyskretnej okazało się ograniczenie czasu prognozowania dla określonych parametrów modelu, jednakże zaletą takiego wyboru była możliwość przewidzenia pojawiania się cykli gospodarczych i ich okresowości.

Przeprowadzona analiza nie wyczerpuje tematu, ale unaocznia, iż modyfikacja deterministycznego modelu wzrostu gospodarczego poprzez założenie o zmienności stóp oszczędności o charakterze nieliniowym, wzbogaca dynamikę modelu o zachowania charakterystyczne dla nieliniowych układów dynamicznych, zwiększając przy tym jakość prognoz uzyskanych za pomocą tak zmodyfikowanego modelu.

Ze względu na skomplikowaną postać niektórych zależności, a także z uwagi na cel pracy i potrzebę skupienia się na podstawowych własnościach modeli, przyjęto szereg uproszczeń, np. założono iż wybrane parametry będą takie same dla obu rodzajów kapitału. Ewentualna kontynuacja pracy powinna rozpocząć się od uchylenia tych założeń.

Zaproponowane modele eksponują zmienne stopy oszczędności jako potencjalny czynnik pojawiania się okresowych wahań kapitału i tym samym mogą stanowić pomost łączący teorię wzrostu z teorią cyklu koniunkturalnego.

Literatura

1. Becker G.S., *Human capital: A theoretical and empirical analysis*, New York: Columbia University Press 1964.
2. Begg D., Fischer S., Dornbusch R., *Makroekonomia*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 2003.
3. Bernanke B.S., Gurkaynak R.S., *Is Growth Exogenous? Taking Mankiw, Romer and Weil Seriously*", „NBER Working Paper" No. 8365, (July 2001).
4. Bullard J.B., Butler A., *Nonlinearity and Chaos in Economic Models: Implications for Policy Decisions*, maszynopis1991-002B, The Federal Reserve Bank of St. Louis., s.5.
5. Day R.H., *Irregular Growth Cycles*, „The American Economic Review", Vol. 72, No. 3 (Jun.,1982),pp. 406-414.
6. Domański S.R., *Kapitał ludzki i wzrost gospodarczy*, PWN, Warszawa 1993.
7. Dowrick S., Rogers M., *Classical and Technological Convergence: Beyond the Solow-Swan Growth Model*, „Oxford Economic Papers", Vol. 54, No. 3 (Jul., 2002), pp. 369-385.
8. Drabik E.: *Dynamiczne nieliniowe modele ekonometryczne: model cykli koniunkturalnych Kaleckiego-Kaldora oraz model wzrostu*. W: *Rynek kapitałowy. Skuteczne inwestowanie*. Red. W. Tarczyński. Szczecin 2002, s. 261-273.
9. Dykas P., Tokarski T., *Podażowe czynniki wzrostu gospodarczego – podstawowe modele teoretyczne*. „Acta Universitatis Lodziensis. Folia Oeconomica nr 294/2013".
10. Ertur C., Koch W., *Growth, Technological Interdependence and Spatial Externalities: Theory and Evidence*, „Journal of Applied Econometrics, Vol. 22, No. 6 (Sep. - Oct., 2007), pp. 1033-1062.
11. Flisikowski K., *Zasoby, struktura kapitału ludzkiego a wzrost gospodarczy*, „Nierówności Społeczne a Wzrost Gospodarczy" 2012 nr 26, s. 203-215.
12. Gabisch G., *Nonlinear Models of Business Cycle Theory*, w: Selected Topics in Operations Research and Mathematical Economics, red. G. Hammer, D. Pallaschke, Springer-Verlag, Berlin 1984.
13. Grandmont J.M., *On endogenous competitive business cycles*, Econometrica 1985, vol. 50, 1345-1370.
14. Hommes C. H., *Adaptive learning and roads to chaos. The case of the cobweb model*, „Economic Letters", 36 (1991).
15. Hommes C.H., *Periodic, almost periodic and chaotic behaviour in Hicks' non-linear trade cycle model*, „Economics Letters", 41 (1993).
16. Hommes C.H., *A reconsideration of Hicks' non-linear trade cycle model*, „Structural Change and Economic Dynamics", 6 (1995).
17. Kevin Lee K., Pesaran M.H., Smith R., *Growth and Convergence in a Multi-Country Empirical Stochastic Solow*, „Journal of Applied Econometrics", Vol. 12, No. 4 (Jul. - Aug., 1997), pp. 357-392.
18. Kruszewski R., *O pewnym modelu wzrostu gospodarczego z kapitałem ludzkim i endogenicznym postępie wiedzy*, „Problemy wzrostu gospodarczego we współczesnych gospodarkach", red. D.Kopycińska, Uniwersytet Szczeciński, Szczecin 2006, s. 18-24.
19. Kruszewski R., *Growth model with human capital. Complex economic dynamics*, „Modeling Economies in Transition", red Władysław Welfe, Piotr Wdowinski, AMFET, Łódź 2006, s. 63-74.
20. Kruszewski R., *Periodic and quasi-periodic dynamics in a modified Samuelson-Hicks model*, Macromodels 2006, Łódź, 2007.
21. Kruszewski R., *Wybrane modele współdziałania mnożnika i akceleratora. Analiza chaotycznej dynamiki*, Oficyna Wydawnicza SGH, Warszawa 2010.
22. Kunasz M., *Teoria kapitału ludzkiego na tle dorobku myśli ekonomicznej*. (w:) A. Manikowski, A. Psyk (red.). „Unifikacja gospodarek europejskich: szanse i zagrożenia". Uniwersytet Warszawski, Warszawa 2004, s.28.

23. Li, T. Y. and Yorke, J. A., *Period three implies chaos*, Amer. Math. Monthly 82 (1975), no. 10, 985–992.
24. Lines M., *Bifurcation scenarios in a heterogeneous agent, multiplier accelerator model*, „Pure Mathematics and Applications", 16 (2007).
25. Lines M., Westerhoff F., *Inflation expectations and macroeconomic dynamics: The case of rational versus extrapolative expectations,* „Journal of Economic Dynamics and Control", 34 (2010).
26. Lorenz H.W., *Goodwin.s nonlinear accelerator and chaotic motion*, „Journal of Economics", 47 (1987).
27. Lorenz H.W., *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion*, Springer – Verlag, Berlin 1989, Heidelberg, s. 29.
28. Lucas R.E., *On the Mechanics of Economic Development*, „Journal of Monetary Economics", 1988, no 22, s. 3–42.
29. Malaga K., *O niektórych dylematach teorii wzrostu gospodarczego i ekonomii*, „ZK Polskie Towarzystwo Ekonomiczne", Warszawa 2009.
30. Mankiw N. Gregory, David Romer, David N. Weil, *A Contribution to the Empirics of Economic Growth*, „Quarterly Journal of Economics", 107, 1992, s. 407 – 437.
31. Masanjala W.H., Papageorgiou C. *The Solow Model with CES Technology: Nonlinearities and Parameter Heterogeneity*, „Journal of Applied Econometrics", Vol. 19, No. 2 (Mar. - Apr., 2004), pp. 171-201.
32. May R., Beddington J.R., *Nonlinear Difference Equations: Stable Points, Stable Cycles, Chaos*. Maszynopis, 1975.
33. Medio A., Lines M., *Nonlinear Dynamics: a Primer*, Cambridge University Press, Cambridge 2001.
34. Mincer J., *Investment in Human Capital and Personal Income Distribution*, "The Journal of Political Economy" 1958, vol. 66, no. 4, ss. 281-302.
35. Miśkiewicz-Nawrocka M., *Modele ekonomiczne z dynamiką chaotyczną* Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach Czasopismo Studia Ekonomiczne, Rocznik 2013, Tom 132, Strony 56-66.
36. Nonneman W., Vanhoudt P., *A Further Augmentation of the Solow Model and the Empirics of Economic Growth for OECD Countries*, „The Quarterly Journal of Economics", Vol. 111, No. 3 (Aug., 1996), pp. 943-953.
37. Nusse H. E., Hommes C.H., *Resolution of chaos with application to a modified Samuelson model*, Journal of Economic Dynamics and Con-trol, 14 (1990).
38. Orzeszko W. *Modele chaotyczne w ekonomii,* „Acta Universitatis Nicolai Copernici. Nauki Humanistyczno-Społeczne. Ekonomia", Tom 36 (2005) s. 155-170, Toruń 2005.
39. Puu T., Gardini L., Sushko I., *A multiplier - accelerator model with floor determined by capital stock*, Journal of Economic Behavior and Organization, 56 (2005).
40. Puu T., *The Hicksian trade cycle with floor and ceiling dependent on capital stock*, Journal of Economic Dynamics and Control, 31 (2007).
41. Schultz T.W., *Investment in human capital*, „American Economic Review" 1961, 51 (1), s. 1–17.
42. Tokarski T., *Determinanty wzrostu gospodarczego w warunkach stałych efektów skali,* Katedra Ekonomii Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 2001.
43. Tokarski T., *Optymalne stopy inwestycji w N-kapitałowym modelu wzrostu gospodarczego*, „Gospodarka Narodowa", Nr 9/2007.
44. Tokarski T., *Wybrane modele podażowych czynników wzrostu gospodarczego*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 2005.
45. Westerhoff H., *Nonlinear expectation formation, endogenous business cycles and stylized facto*, „Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics", 10 (2006c), Issue 4, Article 4.

Małgorzata Kamieniecka